Problemes

Roda el món i torna al Born! Amb el número 39 de la *SCM-Notícies* arriba aquesta nova secció de problemes per a gaudi dels seus lectors. Començaré amb una explicació quant a la mecànica de la gestació de la revista, tot provant de pal·liar les decepcions que experimenten sovint els nostres apreciadíssims col·laboradors, en veure que el seu treball no surt reflectit en aquestes pàgines de cap manera.

Cal dir que el procés d'elaboració de la *SCM-Notícies* és molt i molt llarg; massa, segur. Des que els redactors de cada secció lliurem els originals a l'editor fins que la revista està a punt per ser distribuïda poden passar mesos. Això té com a conseqüència una mica perversa que jo rebo solucions a problemes proposats a la secció quan ja està tancada i lliurada, cosa que me n'impossibilita la consideració adequada. Imagino que, des del punt de vista del col·laborador que rep la nova *SCM/Notícies*, es fa difícil acceptar que una solució enviada fa mesos no sigui ni tan sols esmentada, amb el desencís consegüent.

Així, per exemple, del problema **A124**, la solució del qual publicàvem al núm. 38 de la *SCM-Notícies*, quan la secció ja estava en mans de l'editor, en vam rebre una altra solució de Joaquim Nadal i Vidal de Llagostera, la Selva. Igualment, dels problemes **A126**, **A127** i **A128**, també al núm. 38, n'hem rebut les solucions del mateix Joaquim Nadal, i de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo. A tots dos els demanem les excuses pertinents.

Dit això, passem a agrair a Pep Burillo, de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona, UPC, a José Luis Díaz-Barrero, de Barcelona-Tech, Barcelona, a Miquel Amengual Covas, de Cala Figuera, Mallorca, i a Joaquim Nadal, els enunciats **A133** a **A136**, que podem proposar a continuació gràcies al seu treball.

Quant a les solucions rebudes, he de dir que aquest període ha estat ben productiu: Bruno Salgueiro ens envia la solució al problema **A125**, que publiquem, que millora la fita demanada a l'enunciat, cosa que també fan, en una nota, Roberto de la Cruz Moreno i Alberto Debernardi Pinos, del CRM.

Per al problema **A129** tenim les solucions d'Ernest Fontich, que milloren la proposta de l'enunciat, i de Bruno Salgueiro.

En el problema **A130**, Joaquim Nadal ens mostra que no calen canons per caçar mosquits. Però ens n'han enviat solucions més convencionals Ernest Garriga, del Centre Sant Pau., Mataró, i Bruno Salgueiro.

Una altra millora de la fita proposada a l'enunciat ens la dóna la solució d'Ernest Garriga al problema **A131**. D'aquest problema també n'han enviat solucions Ernest Fontich, Joaquim Nadal i Bruno Salgueiro.

I, finalment, tenim solucions de Joaquim Nadal (publicada) i de Bruno Salgueiro per al problema que quedava, l'**A132**. A tots, el nostre l'agraïment i, segur, el de tots els amables seguidors d'aquesta secció.

I encara una nota final: Joaquim Nadal em fa observar que en la solució publicada del problema **A126** dono com a valor de m 1728 quan l'enunciat deixava clar que $m > 2014$. Sí, sí, a vegades caiem en allò que solem retreure als nostres deixebles i no llegim bé els enunciats!

Per als qui volgueu col·laborar en aquesta secció: el correu electrònic per als enviaments és

`carles.romero.c@gmail.com`

i els materials escrits en TeX o LaTeX ens faciliten moltíssim la feina. Gràcies a tots!

Problemes proposats

A133. (Proposat per Pep Burillo, Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de Telecomunicació de Barcelona, UPC.)
Tu i 99 persones més heu d'abordar un avió de 100 places, i tu ets l'últim a pujar-hi. Tots els passatgers teniu un seient assignat. La primera persona en entrar és una mica despistada, i seu en un lloc aleatori en lloc del que té assignat. Després, els 98 següents segueixen aquest esquema: si el seu seient està buit, hi seuen, però si està ocupat, seuen en un d'aleatori. Quan tu entres queda, lògicament, un lloc buit. Quina és la probabilitat que el lloc que queda sigui precisament el que tenies assignat de bon començament?

A134. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Barcelona-Tech, Barcelona.)
Trobeu totes les solucions positives d'aquest sistema d'equacions:

$$\begin{cases} x+y+z+t=4 \\ xyz+yzt+ztx+txy=4 \end{cases}$$

A135. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sobre els costats d'un triangle $\triangle A_1A_2A_3$ construïm, al seu exterior, rectangles $A_2A_3P_1Q_1$, $A_3A_1P_2Q_2$ i $A_1A_2P_3Q_3$.
Siguin O_1, O_2 i O_3 els respectius circumcentres dels triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$.
a) Demostreu que les rectes A_1O_1, A_2O_2, A_3O_3 són concurrents.
b) Si els triangles $\triangle A_1P_2Q_3$, $\triangle A_2P_3Q_1$ i $\triangle A_3P_1Q_2$ tenen la mateixa àrea, caracteritzeu el punt de concurrència de A_1O_1, A_2O_2 i A_3O_3.

A136. (Proposat per Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)
En un triangle $\triangle ABC$ tracem semicircumferències externes que tenen els costats per diàmetre. Tracem les tangents comunes a aquestes semicircumferències. Si k, m i n són les respectives longituds d'aquests segments tangents, proveu que

$$\frac{km}{n}+\frac{mn}{k}+\frac{nk}{m}=p$$

on p és el semiperímetre del triangle.

Solucions

A125. (Proposat per Xavier Ros Otón, UPC, Barcelona.)
Sigui $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una successió de nombres reals positius. Demostreu que, si la sèrie $\sum a_n$ convergeix, aleshores

$$\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}<\frac{e^2}{2}\sum_{n\geq 1}a_n$$

Solució: (Solució de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.)
Aquest resultat és conseqüència immediata de la desigualtat de **Carleman**, que estableix que si $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de nombres reals no negatius i la sèrie $\sum a_n$ és convergent, aleshores

$$\sum_{n\geq 1}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}<e\sum_{n\geq 1}a_n$$

en què la constant e és òptima, és a dir, la més petita possible que garanteix la desigualtat en tots els casos; a més, la desigualtat és estricta si algun element de la successió no és zero.

D'aquesta manera, la desigualtat de **Carleman**, el fet que $e<e^2/2$ i que $\{a_n\}_{n\geq 1}$ és una successió de nombres reals positius, valida la desigualtat de l'enunciat.
Observem, a més, que $e^2/2$ es podria substituir per e o per qualsevol altre nombre real més gran.

A129. (Proposat per Xavier Ros Otón, Universitat de Texas a Austin.)
Sigui $\{a_k\}_{k\geq 0}$ una successió de nombres reals tal que, per a certa constant C, tenim

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}a_k^2\leq Ca_N^2 \qquad \text{per a tot } N\geq 0$$

Demostreu que la sèrie $\sum_{k\geq 0}a_k$ és convergent.

Solució: (Solució d'Ernest Fontich.)
Provarem un resultat més general: siguin α i β dos nombres estrictament positius. Si $\{a_k\}_{k\geq 0}$ és una successió de nombres

reals tal que, per a una certa constant C, tenim

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k|^\alpha \le C|a_N|^\alpha \qquad \text{per a tot} \quad N \ge 1 \tag{$*$}$$

llavors la sèrie $\sum_{k\ge 0} |a_k|^\beta$ és convergent. (És més general posar la condició $N \ge 1$ en comptes de $N \ge 0$ i així simplifiquem l'argument. De fet, podríem posar $N \ge N_0$ per a un cert $N_0 \ge 1$.)
Provarem primer un resultat intermedi: si $\{a_k\}_{k\ge 0}$ verifica la condició $(*)$, llavors la successió $\{k^{1/\alpha} a_k\}_{k\ge 0}$ també verifica $(*)$ (amb una constant $C' > 0$ diferent). En efecte, en sumar en ambdós costats de $(*)$, tenim

$$\sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} |a_k|^\alpha \le \sum_{l=N+1}^{\infty} C|a_l|^\alpha \le C^2 |a_N|^\alpha.$$

Aquesta fitació ens permet intercanviar l'ordre de sumació en la suma doble i tenim

$$\begin{aligned} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{k=l+1}^{\infty} |a_k|^\alpha &= \sum_{k=N+2}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{k-1} |a_k|^\alpha \\ &= \sum_{k=N+2}^{\infty} (k-N-1)|a_k|^\alpha. \end{aligned}$$

A més, de la condició $(*)$ es dedueix que

$$|a_{N+1}|^\alpha \le C|a_N|^\alpha.$$

Notem que si $N \ge 1$ i $k \ge N+2$, l'expressió $\dfrac{k}{(k-N-1)N} = \left(1 + \dfrac{N+1}{k-N-1}\right)\dfrac{1}{N}$ és decreixent en k. Per tant, $\dfrac{k}{(k-N-1)N} \le \dfrac{N+2}{N} \le 3$ i $k \le 3N(k-N-1)$ pels valors de k, N indicats. Llavors, per a $N \ge 1$,

$$\begin{aligned} &\sum_{k=N+1}^{\infty} k|a_k|^\alpha = \\ &= (N+1)|a_{N+1}|^\alpha + \sum_{k=N+2}^{\infty} k|a_k|^\alpha \\ &\le N\left[\frac{N+1}{N}|a_{N+1}|^\alpha + 3\sum_{k=N+2}^{\infty}(k-N-1)|a_k|^\alpha\right] \\ &\le N\left[2|a_{N+1}|^\alpha + 3C^2|a_N|^\alpha\right] \\ &= \left[2C + 3C^2\right] N|a_N|^\alpha. \end{aligned}$$

En aplicar iterativament aquest resultat intermedi tenim que $\{k^{m/\alpha} a_k\}_{k\ge 0}$ verifica $(*)$ per a tot $m \ge 1$. Això implica que $\sum_{k\ge 0} k^m |a_k|^\alpha$ és convergent per a tot $m \ge 1$ i, en particular, que $k^m |a_k|^\alpha$ és fitat per una constant M_m. Ara, tot prenent $m \ge 2\alpha/\beta$, tenim que

$$|a_k|^\beta = (k^m |a_k|^\alpha)^{\beta/\alpha} k^{-m\beta/\alpha} \le M_m^{\beta/\alpha} \frac{1}{k^2}$$

que implica que $\sum_{k\ge 0} |a_k|^\beta$ és convergent.

A130. (Proposat per Gerard Planes Conangla, UPC, Barcelona.)
Demostreu que

$$\exp\left(\sum_p \frac{1}{p^2}\right) > \frac{15}{\pi^2}$$

on el sumatori recorre tots els nombres primers.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)
L'enunciat equival a demostrar que

$$\sum_p \frac{1}{p^2} > \log\left(\frac{15}{\pi^2}\right)$$

i això s'aconsegueix amb molt pocs sumands. En efecte,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \\ &\quad = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \\ &\quad = \frac{18589}{44100} = 0.421519274\ldots > \\ &\quad > \log\left(\frac{15}{\pi^2}\right) = 0.418590429\ldots \end{aligned}$$

A131. (Proposat per José Luis Díaz-Barrero, Barcelona-Tech, Barcelona.Siguin a, b, i c tres nombres positius que fan $a+b+c = 1$. Demostreu que

$$\begin{aligned} a\sqrt{\frac{bc}{a^3+b^3+c^3}} &+ b\sqrt{\frac{ca}{a^3+b^3+c^3}} \\ &+ c\sqrt{\frac{ab}{a^3+b^3+c^3}} \le \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

Solució: (Solució d'Ernest Garriga, Centre Sant Pau, Mataró.)
Fem

$$R = a\sqrt{\frac{bc}{a^3+b^3+c^3}} + b\sqrt{\frac{ca}{a^3+b^3+c^3}}$$

$$+\,c\sqrt{\frac{ab}{a^3+b^3+c^3}}=$$
$$=a\sqrt{\frac{bc}{a^3+b^3+c^3}}+\oplus$$

en què $\oplus$ indica, ara i després, els dos termes similars al primer de cada expressió que resulten de la permutació circular $a\to b\to c\to a$. Posem-ho en la forma:

$$\begin{aligned}R&=\sqrt{a}\sqrt{\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}}+\oplus\\&=\sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^3b^3c^3}}{\frac{a^3+b^3+c^3}{3}}}+\oplus\\&=\sqrt{\frac{a}{3}}\sqrt{\frac{G(a^3,b^3,c^3)}{A(a^3,b^3,c^3)}}+\oplus\end{aligned}$$

La mitjana geomètrica de n nombres és menor o igual que la seva mitjana aritmètica i la igualtat només es compleix quan els n nombres són iguals. Tenim:

$$\begin{aligned}R&\le\frac{1}{\sqrt{3}}\left\langle\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}\right),(1,1,1)\right\rangle\\&\le\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{a+b+c}\cdot\sqrt{3}=1\end{aligned}$$

que millora la fita proposada a l'enunciat. La igualtat es complirà si, i només si, $a=b=c=1/3$.

A132. (Proposat per Miquel Amengual Covas, Cala Figuera, Mallorca.)
Sigui D el punt del costat BC d'un triangle $\triangle ABC$ tal que $BD=2\cdot DC$ i sigui E el punt del segment AD tal que $AE:ED=3:4$. Suposem que $\widehat{BED}=60^\circ$ i que $\widehat{DEC}=30^\circ$. Demostreu que el triangle $\triangle ABC$ és equilàter.

Solució: (Solució de Joaquim Nadal i Vidal, Llagostera, la Selva.)
Siguin $CD=x$, $BD=2x$, $AE=3y$, , $ED=4y$ i sigui $\widehat{EBD}=\alpha$. En aplicar el teorema dels sinus als triangles $\triangle BDE$ i $\triangle CDE$ tenim:

$$\frac{2x}{\sin 60^\circ}=\frac{4y}{\sin\alpha}\qquad\text{i}\qquad\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{4y}{\sin\left(90^\circ-\alpha\right)}$$

o sigui

$$y=\frac{x\sin\alpha}{\sqrt{3}}\quad\text{i}\quad y=\frac{x\cos\alpha}{2}\quad\text{i}\quad\frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}}=\frac{\cos\alpha}{2}$$

Aleshores, de

$$4\sin^2\alpha=3\cos^2\alpha=4\left(1-\cos^2\alpha\right)$$

en resulta

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{7}}\qquad\text{i}\qquad\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

i de $y=\frac{x}{\sqrt{7}}$ i tenint en compte que el triangle $\triangle BEC$ és rectangle en E, s'obté

$$AE=3y=\frac{3x}{\sqrt{7}},\quad BE=BC\cos\alpha=\frac{6x}{\sqrt{7}},$$
$$\text{i}\qquad CE=BC\sin\alpha=\frac{3x\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

Ara apliquem el teorema dels cosinus als triangles $\triangle ABE$ i $\triangle ACE$:

$$\begin{aligned}AB^2&=AE^2+BE^2-2AE\cdot BE\cos 120^\circ\\&=\frac{9x^2}{7}+\frac{36x^2}{7}+\frac{18x^2}{7}=9x^2\\AC^2&=AE^2+EC^2-2AE\cdot EC\cos 150^\circ\\&=\frac{9x^2}{7}+\frac{27x^2}{7}+\frac{27x^2}{7}=9x^2\end{aligned}$$

i, per tant, $AB=AC=3x=BC$ i el triangle és equilàter.

Carles Romero
IES Manuel Blancafort, la Garriga